列万·阿尔蒂拉克瓦

离心压缩机叶轮叶片中弧线采用伯努利双纽线片段

2013 年

摘要。 本文提出一种离心压缩机叶轮叶片中弧线的解析构造方法，以两端中心对称的伯努利双纽线光滑片段为基础。由曲线的隐式方程导出纵坐标的显式表达式，以保留结点两侧各自的符号。进一步推导了按给定进口角进行旋转，以及根据弦线与出口圆的交点进行等比缩放的公式。得出了弧长、曲率和出口几何角的表达式。文中给出该片段适合构造沿径向延伸的叶片的条件，并说明几何结果在气动解释上的适用范围。

关键词。 离心压缩机、叶轮、叶片中弧线、伯努利双纽线、曲率、型线设计。

1　引言

叶片中弧线在叶轮平面图中确定叶片从进口边缘到出口边缘的走向。中弧线与厚度分布规律、流道宽度及相邻叶片的位置共同决定叶片间通道的几何形状。即使进口直径、出口直径和边缘处的角度相同，不同的中弧线仍可在叶轮内部形成不同的切线方向和流通截面。这会影响气流沿通道转向、加速或减速的位置，以及叶片表面载荷的分布。

进行几何型线设计时，可用圆弧来定义中弧线。圆弧的曲率恒定。在气动型线设计中，确定叶片形状的方法之一是预先给定叶片表面相对速度的分布[1, 2]。本文采用的几何方法给出一个解析曲线族，可以在进口边缘和出口边缘之间的整个区间内计算切线方向和曲率的变化。因此，在计算流场之前即可评估初始几何形状。

所选双纽线片段沿一条光滑分支通过结点。曲率在片段中点处为零，并在此处改变符号。偏离拐点越远，曲率绝对值越大。切线的转向分布在相接的两段曲线上，方向和曲率在接点处连续。中心对称性决定了端点切线之间的关系。将曲线布置在叶轮内后，该关系须与所要求的边缘位置及出口角相容。

1.1　选择该曲线的气动依据

在平面模型中，若相对流线接近叶片中弧线，流线的几何曲率会影响法向加速度。设相对速度大小为 W，流线的有符号曲率为 κ_{T}，则有

$$a_n = W^2 \kappa_{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

中弧线的曲率分布可作为估计上述加速度分布的几何依据。在 W 相同的条件下，流线曲率绝对值越小，法向加速度绝对值也越小。在以恒定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转的坐标系中，定常流动的运动方程沿法向投影为

$$\rho_{\Gamma} W^2 \kappa_{\mathrm{T}} = -\frac{\partial p}{\partial n} - \rho_{\Gamma}\bigl[2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\bigr]\cdot\boldsymbol{n} + (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{n}. \tag{2}$$

式中，p 为压力，ρ_{Γ} 为气体密度，$\boldsymbol{\tau}$ 为黏性应力张量，$\boldsymbol{r}$ 为相对于旋转轴的径向位置矢量，$\boldsymbol{n}$ 为所考察平面流线的左侧单位法向量。几何项 $W^2\kappa_{\mathrm{T}}$ 应与科里奥利力和离心力的作用一同考虑。仅凭中弧线的曲率无法确定压力分布、边界层发展或分离边界。

在势场 Φ 中，可以用质点沿给定弧线无摩擦运动的理想情形作物理类比。设 v_1 为质点的初始速度，s 为路径长度，则通过弧线所需的时间由下列积分确定

$$T = \int_{0}^{L} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{v_1^2 + 2\bigl[\Phi(0) - \Phi(s)\bigr]}}. \tag{3}$$

如果要证明在给定初始条件和势场下沿弧线与沿弦线的运动时间相等，就必须另行证明相应的两个积分相等。叶轮内的气体流动还受到压力和黏性应力的影响。因此，选择双纽线的工程依据是曲率分布可计算，且曲线可与叶轮几何相匹配。损失能否降低、效率能否提高，仍须通过气动分析检验。

2　双纽线的原始分支

设 D_1 和 D_2 为叶轮平面内分别经过中弧线起点和终点的圆的直径。在局部坐标系 $O'xy$ 中，双纽线的两个焦点为 $(-C,0)$ 和 $(C,0)$，其中 C 为结点到任一焦点的距离。参数 C 与所选片段沿 x 轴的半跨度 a 由下式给定

$$C = D_2 - D_1, \qquad D_2 > D_1 > 0, \tag{4}$$

$$a = \frac{D_2 - D_1}{2\sqrt{2}}. \tag{5}$$

记 $A = \sqrt{2}\,C$，则双纽线的经典方程为 $(x^2+y^2)^2 = A^2(x^2-y^2)$[3]。在本文采用的记号下，该方程可直接由到两焦点距离的乘积恒定这一条件导出

$$\sqrt{(x-C)^2+y^2}\,\sqrt{(x+C)^2+y^2} = C^2, \tag{6}$$

$$(x^2+y^2+C^2)^2 - 4C^2x^2 = C^4, \tag{7}$$

$$(x^2+y^2)^2 = 2C^2(x^2-y^2). \tag{8}$$

令 $S(x) = \sqrt{C^4 + 4C^2x^2}$。将 y^2 单独写在等式左侧，得到

$$y^2 = S(x) - x^2 - C^2, \tag{9}$$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{S(x) - x^2 - C^2}, \tag{10}$$

$$-a \le x \le a, \qquad f(0) = 0. \tag{11}$$

在图 1 中，该分支从第三象限延伸到第一象限，因此 x 与 $f(x)$ 的符号相同。纵坐标的符号不可忽略。若结点两侧的平方根均取同一符号，则相接两段的切线方向不同。

下列有理化形式便于在结点附近计算，也说明该分支可解析地延拓通过结点

$$S(x) - x^2 - C^2 = \frac{x^2(2C^2 - x^2)}{S(x) + x^2 + C^2}, \tag{12}$$

$$f(x) = x\sqrt{\frac{2C^2 - x^2}{S(x) + x^2 + C^2}}. \tag{13}$$

函数 f 为奇函数。最后一个公式中根号内的表达式在整个选定区间上均为正。片段的起点、终点、弦矢量和弦长依次由下式确定

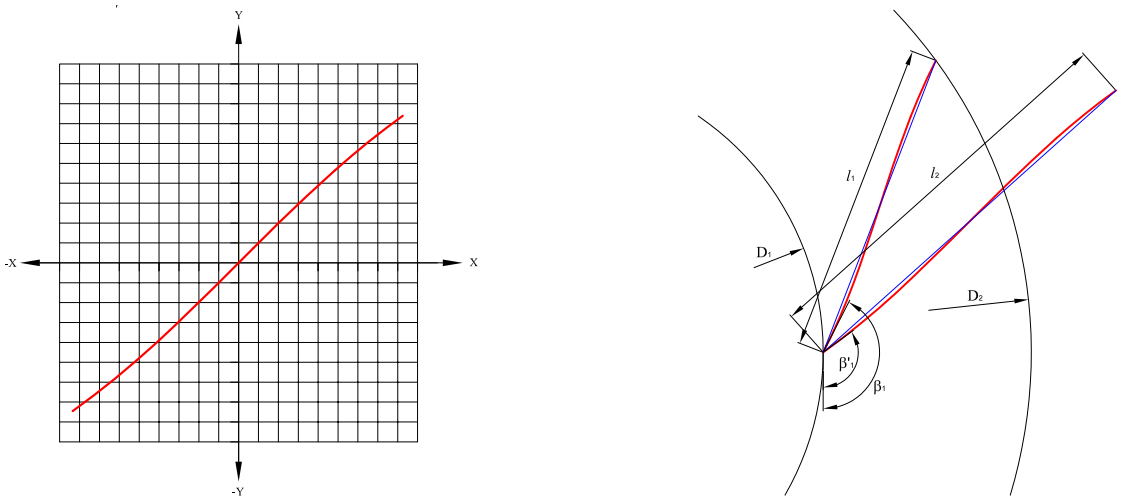
$$\boldsymbol{q}(x) = \big(x, f(x)\big)^{\mathsf{T}}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{q}_1 = \big(-a, -f(a)\big)^{\mathsf{T}}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \big(a, f(a)\big)^{\mathsf{T}}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1 = 2\big(a, f(a)\big)^{\mathsf{T}}, \tag{17}$$

$$l_1 = \|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1\| = 2\sqrt{a^2 + f(a)^2}. \tag{18}$$



（a）局部坐标轴中的光滑分支　　（b）旋转及与圆周的定位

图 1: 中弧线的构造。以下计算中的 l_1 和 l_2 分别指原始弦长和最终弦长。

3　原始片段的切线和曲率

当 $x \neq 0$ 时，对恒等式 $f^2 = S - x^2 - C^2$ 求导

$$S'(x) = \frac{4C^2 x}{S(x)}, \tag{19}$$

$$2f(x)f'(x) = \frac{4C^2 x}{S(x)} - 2x, \tag{20}$$

$$f'(x) = \frac{x}{f(x)}\left(\frac{2C^2}{S(x)} - 1\right). \tag{21}$$

切线在结点处连续。对有理化后的表达式展开，得到

$$f(x) = x - \frac{x^3}{C^2} + O\left(\frac{x^5}{C^4}\right), \qquad x \to 0, \tag{22}$$

$$f'(0) = 1, \tag{23}$$

$$f''(0) = 0. \tag{24}$$

导数 f' 为偶函数，因此 $f'(-a) = f'(a)$。在局部坐标轴中，进口处的切线方向用角度 α_1 表示。切线斜率等于割线斜率的极限

$$f'(-a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h}, \tag{25}$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\big(f'(-a)\big). \tag{26}$$

有符号曲率 κ_0 按 x 增大的方向定义。当 $x \neq 0$ 时，二阶导数和曲率分别为

$$f''(x) = \frac{\dfrac{2C^2}{S(x)} - 1 - \dfrac{8C^4 x^2}{S(x)^3} - \big(f'(x)\big)^2}{f(x)}, \tag{27}$$

$$\kappa_0(x) = \frac{f''(x)}{\big[1 + \big(f'(x)\big)^2\big]^{3/2}}. \tag{28}$$

设 $\rho = \|\boldsymbol{q}(x)\|$ 为到结点的距离，φ 为局部极角。分支的正半段满足 $\rho^2 = A^2\cos(2\varphi)$。对 φ 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = -\rho\,\mathrm{tg}(2\varphi), \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\varphi^2} = \rho\,\mathrm{tg}^2(2\varphi) - \frac{2\rho}{\cos^2(2\varphi)}, \tag{30}$$

$$\frac{\rho^2 + 2(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\varphi)^2 - \rho\,\mathrm{d}^2\rho/\mathrm{d}\varphi^2}{\left[\rho^2 + (\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\varphi)^2\right]^{3/2}} = \frac{3\rho}{A^2}. \tag{31}$$

最后一个表达式给出沿 φ 增大方向的曲率。在 $x > 0$ 的区间内，比值 $f(x)/x$ 随 x 增大而减小，因为其有理化表达式中根号内的分子减小、分母增大。因此，φ 随 x 增大而减小。考虑到 f'' 为奇函数、f' 为偶函数，整个片段上的曲率规律为

$$\kappa_0(x) = -\frac{3\,\mathrm{sgn}(x)\sqrt{x^2 + f(x)^2}}{2C^2}, \qquad \kappa_0(0) = 0. \tag{32}$$

特别地，$\rho^2 = S(x) - C^2$ 随 $|x|$ 增大而增大。所选分支的曲率绝对值在两端达到最大值，结点为拐点。

4 在叶轮内定位曲线

4.1 对齐进口点和切线

全局坐标系 OXY 的原点位于叶轮轴线上。X 轴沿径向指向进口点 P_1。规定逆时针旋转为正。进口几何角 β_1 从逆旋转方向的切线向径向外侧量取。两个半径和给定的进口单位切向量分别为

$$r_1 = \frac{D_1}{2}, \tag{33}$$

$$r_2 = \frac{D_2}{2}, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = (r_1, 0)^{\mathsf{T}}, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{t}_1 = (\sin\beta_1, -\cos\beta_1)^{\mathsf{T}}. \tag{36}$$

将片段起点移至 P_1 后，原始角度 β_1' 也从同一参考方向量取。两角之差确定旋转角 γ

$$\beta_1' = \frac{\pi}{2} + \alpha_1, \tag{37}$$

$$\gamma = \beta_1 - \beta_1', \tag{38}$$

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}. \tag{39}$$

平移和旋转适用于整个片段。特别地，旋转后的弦矢量由原始弦的两个端点之差确定

$$\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{P}_1 + R(\gamma)\big[\boldsymbol{q}(x) - \boldsymbol{q}_1\big], \tag{40}$$

$$\boldsymbol{d} = R(\gamma)\big(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1\big), \tag{41}$$

$$\|\boldsymbol{d}\| = l_1. \tag{42}$$

4.2 射线与出口圆的交点

从 P_1 沿旋转后的弦矢量方向作射线。其与半径为 r_2 的圆的交点由满足以下条件的正参数 λ 确定

$$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1 + \lambda \boldsymbol{d}, \tag{43}$$

$$\|\boldsymbol{P}_1 + \lambda \boldsymbol{d}\|^2 = r_2^2, \tag{44}$$

$$l_1^2 \lambda^2 + 2(\boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{d})\lambda + r_1^2 - r_2^2 = 0. \tag{45}$$

由于 $r_2 > r_1$，该二次方程恰有一个正根，对应从进口指向出口的交点。记 $B = \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{d}$，得到

$$\lambda = \frac{-B + \sqrt{B^2 + l_1^2 (r_2^2 - r_1^2)}}{l_1^2}, \tag{46}$$

$$l_2 = \|\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1\| = \lambda l_1, \tag{47}$$

$$k_{\mathrm{M}} = \frac{l_2}{l_1} = \lambda. \tag{48}$$

当 $d_X \neq 0$ 时，若将直线写成 $Y = kX + b$，其与圆的交点方程可写成下列标量形式

$$k = \frac{d_Y}{d_X}, \tag{49}$$

$$b = Y_1 - k X_1, \tag{50}$$

$$j_1 = 1 + k^2, \tag{51}$$

$$j_2 = 2kb, \tag{52}$$

$$j_3 = b^2 - r_2^2, \tag{53}$$

$$j_4 = j_2^2 - 4 j_1 j_3, \tag{54}$$

$$X_2 = \frac{-j_2 \pm \sqrt{j_4}}{2 j_1}, \tag{55}$$

$$Y_2 = k X_2 + b. \tag{56}$$

直线与圆有两个交点。应选取满足 $(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \cdot \boldsymbol{d} > 0$ 的交点。弦为竖直线时，仍可使用矢量形式。

4.3 中弧线的最终方程

以进口点 P_1 为基点进行等比缩放。 **中弧线的主要计算方程**

$$\boxed{\boldsymbol{P}(x) = \boldsymbol{P}_1 + k_{\mathrm{M}} R(\gamma)\big[\boldsymbol{q}(x) - \boldsymbol{q}_1\big], \qquad -a \le x \le a.} \tag{57}$$

在叶轮坐标系中

$$X(x) = r_1 + k_{\mathrm{M}}\big[(x + a)\cos\gamma - (f(x) + f(a))\sin\gamma\big], \tag{58}$$

$$Y(x) = k_{\mathrm{M}}\big[(x + a)\sin\gamma + (f(x) + f(a))\cos\gamma\big]. \tag{59}$$

参数表示法保留变换前后各点的对应关系。对局部公式本身进行等比缩放时，使用以下恒等关系

$$\widetilde{x} = k_{\mathrm{M}} x, \tag{60}$$

$$\widetilde{C} = k_{\mathrm{M}} C, \tag{61}$$

$$\widetilde{y}(\widetilde{x}) = \operatorname{sgn}(\widetilde{x}) \sqrt{\sqrt{\widetilde{C}^4 + 4\widetilde{C}^2 \widetilde{x}^2} - \widetilde{x}^2 - \widetilde{C}^2}. \tag{62}$$

局部区间相应变为 $[-k_{\mathrm{M}} a, k_{\mathrm{M}} a]$。旋转使进口切线与 $\boldsymbol{t}_1$ 对齐，随后缩放保持该方向。按构造可知 $\boldsymbol{P}(-a) = \boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}(a) = \boldsymbol{P}_2$，且 $\|\boldsymbol{P}_2\| = r_2$。

5 几何与出口角校核

变换后的叶轮中弧线的单位切向量、弧长和曲率由下列关系确定

$$\boldsymbol{t}(x)=\frac{R(\gamma)(1,f'(x))^{\mathsf{T}}}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^{2}}}, \tag{63}$$

$$s(x)=k_{\mathbf{M}}\int_{-a}^{x}\sqrt{1+\left(f'(u)\right)^{2}}\,\mathrm{d}u, \tag{64}$$

$$L=k_{\mathbf{M}}\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(f'(u)\right)^{2}}\,\mathrm{d}u, \tag{65}$$

$$\kappa(x)=\frac{\kappa_{0}(x)}{k_{\mathbf{M}}}, \tag{66}$$

$$\max_{x\in[-a,a]}|\kappa(x)|=\frac{3\sqrt{a^{2}+f(a)^{2}}}{2k_{\mathbf{M}}C^{2}}. \tag{67}$$

正的缩放系数不改变切线方向，但会改变弧长及曲率绝对值。在全局坐标系中，拐点位于弦的中点

$$\boldsymbol{P}(0)=\frac{\boldsymbol{P}_{1}+\boldsymbol{P}_{2}}{2}. \tag{68}$$

为核验曲线沿径向的变化，计算曲线点到轴线的距离及其导数

$$r(x)=\sqrt{X(x)^{2}+Y(x)^{2}}, \tag{69}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=\frac{\boldsymbol{P}(x)\cdot\boldsymbol{P}'(x)}{r(x)}. \tag{70}$$

曲线在全区间内可表示为半径的单值函数的一个充分条件是当 $r>0$ 时 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x>0$。除了将端点定位在相应圆周上，还需要验证这一条件。当 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x>0$ 时，设当前位置的几何角为 $\beta(x)$，则切线沿径向和周向的投影给出

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}=\sin\beta, \tag{71}$$

$$r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=-\cos\beta, \tag{72}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}=-\frac{\operatorname{ctg}\beta}{r}. \tag{73}$$

因此，中弧线的周向位置取决于角度沿整条曲线的分布。

在出口处定义径向与周向单位矢量。周向与旋转正方向一致

$$\boldsymbol{e}_{r,2}=\frac{1}{r_{2}}(X_{2},Y_{2})^{\mathsf{T}}, \tag{74}$$

$$\boldsymbol{e}_{\theta,2}=\frac{1}{r_{2}}(-Y_{2},X_{2})^{\mathsf{T}}. \tag{75}$$

出口几何角由切向量 $\boldsymbol{t}(a)$ 的两个投影确定

$$\sin\beta_{2}=\boldsymbol{t}(a)\cdot\boldsymbol{e}_{r,2}, \tag{76}$$

$$\cos\beta_{2}=-\boldsymbol{t}(a)\cdot\boldsymbol{e}_{\theta,2}. \tag{77}$$

两个投影的符号确定角度所在的象限。由于原始分支两端的切线同向，$\boldsymbol{t}(a)=\boldsymbol{t}(-a)$。若 θ_{2} 为点 P_{2} 相对于 X 轴的有向极角，则有

$$\beta_{2}\equiv\beta_{1}-\theta_{2}\pmod{2\pi}. \tag{78}$$

给定 D_{1}、D_{2} 和 β_{1} 后，对称片段的出口角由构造确定。只有满足上述关系，才能独立指定两个角度与两条边缘的位置。在端点和角度固定的条件下比较型线时，应先核验这一条件，再比较曲率。

6 中弧线与叶片间通道

图 2 说明不同的中弧线如何改变叶片间通道的形状。科研生产公司 Khimmash-Kompressor Service（HKS）的中弧线由双纽线构造。LPI 曲线对应列宁格勒理工学院的型线设计方法，$R=\text{const}$ 表示圆弧。图中展示了不同方案的几何差异，可用于建立相同条件下的计算模型。

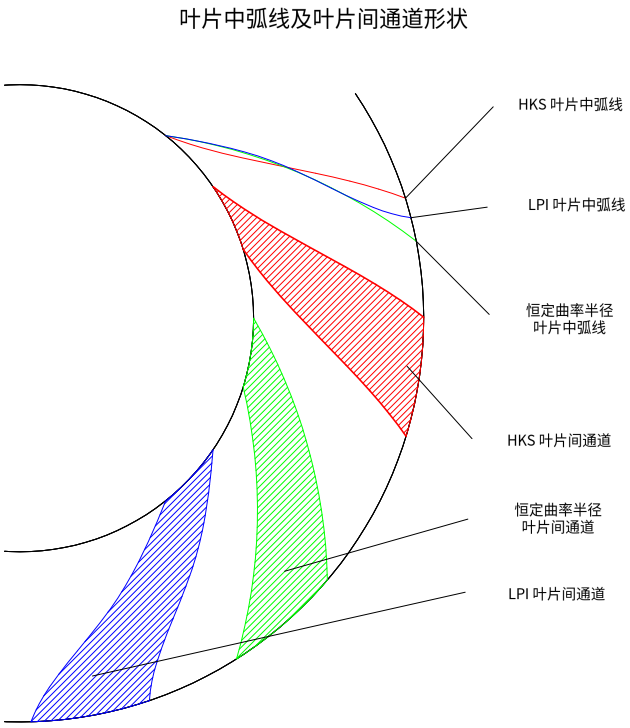


图 2: HKS、LPI 和恒定曲率半径方案的中弧线及叶片间通道示意图。

在平面模型中，沿中弧线规定半厚度分布 $h(s)$，以构造叶片两侧的型线。若 $\boldsymbol{n}(s)$ 为左侧单位法向量，$\boldsymbol{t}(s)$ 为单位切向量，则两侧型线由下式给出

$$\boldsymbol{P}_{\pm}(s)=\boldsymbol{P}(s)\pm h(s)\boldsymbol{n}(s), \tag{79}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_{\pm}}{\mathrm{d}s}=\bigl[1\mp h(s)\kappa(s)\bigr]\boldsymbol{t}(s)\pm\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{n}(s). \tag{80}$$

条件 $h(s)|\kappa(s)|<1$ 足以保证两侧型线在局部均为正则曲线。流通截面还取决于叶轮的子午面宽度、厚度分布及周向节距。给定叶片数 z 后，将中弧线绕叶轮轴旋转一个角节距，即得到相邻叶片的中弧线

$$\Delta\theta=\frac{2\pi}{z}. \tag{81}$$

几何模型中需要校核流通截面、相邻叶片两侧型线是否相交，以及边缘与子午面轮廓是否相符。若要在比较计算中单独评估曲率分布的影响，应固定边缘位置、进口和出口角、厚度分布、子午面几何、转速、流量及气体进口状态。在这些条件下，计及计算精度，速度场、损失和效率的变化可归因于中弧线形状的变化。

7 结论

伯努利双纽线的对称片段给出一条可解析确定的中弧线，其切线和曲率均连续。曲率符号相反的两段在拐点处相接。每一段的曲率绝对值由到原始曲线结点的距离和变换的缩放系数确定。

该方法使进口切线与给定的几何角对齐，并使出口点位于外圆上。正的缩放系数由旋转后的弦向射线与该圆的交点唯一确定。出口角可由端点的相对位置及两端切线同向这一条件求得。

这种几何形状在气动上是否适用，需要根据可比通道内的流动特性和损失判断。文中公式为这种验证提供了可复现的初始几何。

8 HKS 叶轮的数值算例

对于 HKS 叶轮，直径 D_1 和 D_2 确定进口边缘和出口边缘的位置。计算过程中不进行中间舍入。

8.1 双纽线的原始片段

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 296\ \text{mm},\\
D_2 &= 560\ \text{mm},\\
\beta_1 &= 39{,}069^\circ,\\
r_1 &= \frac{296}{2} = 148\ \text{mm},\\
r_2 &= \frac{560}{2} = 280\ \text{mm},\\
C &= 560 - 296 = 264\ \text{mm},\\
a &= \frac{264}{2\sqrt{2}} \approx 93{,}338095\ \text{mm},\\
f(a) &= \sqrt{\sqrt{264^4 + 4\cdot 264^2 a^2} - a^2 - 264^2} \approx 83{,}377566\ \text{mm},\\
\boldsymbol{q}_1 &\approx (-93{,}338095;\ -83{,}377566)^{\mathsf{T}}\ \text{mm},\\
\boldsymbol{q}_2 &\approx (93{,}338095;\ 83{,}377566)^{\mathsf{T}}\ \text{mm},\\
l_1 &= 2\sqrt{a^2 + f(a)^2} \approx 250{,}310356\ \text{mm}.
\end{aligned}
$$

8.2 旋转及与出口圆的定位

$$
\begin{aligned}
f'(-a) = f'(a) &= \frac{a}{f(a)}\left(\frac{2\cdot 264^2}{\sqrt{264^4 + 4\cdot 264^2 a^2}} - 1\right) \approx 0{,}70861238,\\
\alpha_1 &= \operatorname{arctg} f'(-a) \approx 35{,}321859^\circ,\\
\gamma &= 39{,}069^\circ - 90^\circ - \alpha_1 \approx -86{,}252859^\circ,\\
\boldsymbol{P}_1 &= (148;\ 0)^{\mathsf{T}}\ \text{mm},\\
\boldsymbol{d} &= R(\gamma)(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \approx (178{,}598554;\ -175{,}379106)^{\mathsf{T}}\ \text{mm},\\
B &= \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{d} \approx 26\,432{,}586003\ \text{mm}^2,\\
k_{\text{м}} &= \frac{-B + \sqrt{B^2 + l_1^2(280^2 - 148^2)}}{l_1^2} \approx 0{,}617199818,\\
l_2 &= k_{\text{м}} l_1 \approx 154{,}491506\ \text{mm},\\
\boldsymbol{P}_2 &= \boldsymbol{P}_1 + k_{\text{м}}\boldsymbol{d} \approx (258{,}230995;\ -108{,}243952)^{\mathsf{T}}\ \text{mm},\\
\|\boldsymbol{P}_2\| &= \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = 280\ \text{mm}.
\end{aligned}
$$

8.3 弧长与出口角

在原始分支上积分，并计入缩放系数，得到中弧线长度。

$$
\begin{aligned}
L &= k_{\text{м}} \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \approx 154{,}687625\ \text{mm},\\
L - l_2 &\approx 0{,}196119\ \text{mm},\\
\theta_2 &= \operatorname{arctg}\!\left(\frac{Y_2}{X_2}\right) \approx -22{,}742208^\circ \qquad (X_2 > 0),\\
\beta_2 &= \beta_1 - \theta_2 \approx 61{,}811208^\circ .
\end{aligned}
$$

HKS 叶轮出口几何角的原始数值为 $\beta_{2,\text{табл}} = 61{,}829^\circ$。两者差值的绝对值为

$$
|\beta_2 - \beta_{2,\text{табл}}| \approx 0{,}018^\circ .
$$

8.4 极坐标参数化与采样点

极点 O 位于叶轮轴线上。射线 $\theta = 0$ 通过进口边缘 P_1。规定逆时针方向的极角 θ 为正。在本算例中，从进口边缘向出口延伸时，极角为负。θ 表示点的位置，β 表示切线相对于当地周向的倾角。

直接计算坐标。 在所选光滑分支上引入无量纲参数 u。当 $x \neq 0$ 时，令 $y/x = (1-u^2)/(1+u^2)$，且 u 与 x 同号。代入双纽线原始方程，并将分支延拓通过结点，可得

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{2}\,C, \qquad D(u) = 1 + u^4,\\
\boldsymbol{v}(u) &= (u + u^3,\; u - u^3)^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{q}(u) &= \frac{A}{D(u)}\,\boldsymbol{v}(u),\\
u_* &= \sqrt{\frac{a - f(a)}{a + f(a)}}, \qquad -u_* \le u \le u_* .
\end{aligned}
$$

其中 $u = -u_*$ 对应进口，$u = 0$ 对应拐点，$u = u_*$ 对应出口。在全局坐标系中，对称中心 $\boldsymbol{M}$ 和位置矢量表达式的分子 $\boldsymbol{N}(u)$ 由下式确定

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \frac{\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2}{2},\\
\boldsymbol{N}(u) &= D(u)\boldsymbol{M} + k_{\text{м}} A R(\gamma)\boldsymbol{v}(u),\\
\boldsymbol{P}(u) &= \frac{\boldsymbol{N}(u)}{D(u)}.
\end{aligned}
$$

因此，可直接由参数计算极坐标

$$
\begin{aligned}
r(u) &= \frac{\sqrt{N_X(u)^2 + N_Y(u)^2}}{D(u)},\\
\theta(u) &= \operatorname{arctg}\!\left(\frac{N_Y(u)}{N_X(u)}\right) \qquad \text{当 } N_X(u) > 0 .
\end{aligned}
$$

一般情况下，极角所在象限由两个坐标的符号确定。依次代入 u 的各个取值即可绘制整条曲线。若输入量为极角 θ，则半径 $r(\theta)$ 可通过射线与所选分支的交点求得。为此，在原始方程中代入

$$
\boldsymbol{q} = \frac{R(\gamma)^{\mathsf{T}}\big(r(\cos\theta, \sin\theta)^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{M}\big)}{k_{\text{м}}}.
$$

在所得关于 r 的四次方程的各个根中，选取对应所需分支且位于 P_1 到 P_2 之间的交点。

等半径步长采样。 表中采用 11 个采样点，包括两条边缘。半径条件及系数记号如下

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{280-148}{11-1} = 13{,}2\ \mathrm{mm}, \\ r_i &= 148 + (i-1)\Delta r, \qquad i = 1,\dots,11, \\ \boldsymbol{b} &= (b_x, b_y)^{\mathsf{T}} = R(\gamma)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{M}, \\ E_i &= \|\boldsymbol{M}\|^2 - r_i^2 . \end{aligned}$$

由于 $\|\boldsymbol{q}(u)\|^2 = 2A^2u^2/D(u)$，展开条件 $\|\boldsymbol{P}(u_i)\|^2 = r_i^2$ 得到

$$E_i (1 + u_i^4) + 2k_{\mathrm{M}} A\big[(b_x + b_y)u_i + (b_x - b_y)u_i^3\big] + 2k_{\mathrm{M}}^2 A^2 u_i^2 = 0 .$$

对于中间半径，取区间 $[-u_*, u_*]$ 上的实根。该区间内半径单调增大，因此每个 r_i 恰有一个对应根。表中数值由多项式的根代入 $\theta(u_i)$ 的计算式求得。

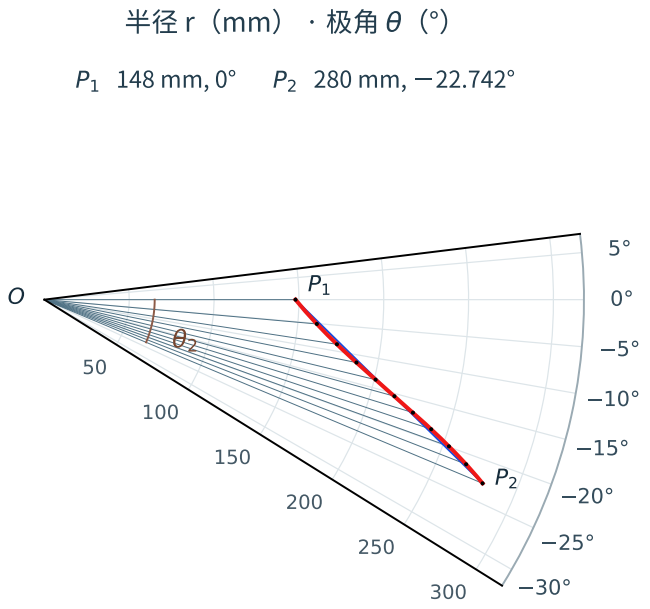


图 3: 极坐标下的双纽线（红色）和弦（蓝色）。细线连接黑色采样点与极点 O。

表 1: 11 个采样点的极坐标

序号	r，mm	θ，度
1	148,000	0,000
2	161,200	−5,097
3	174,400	−8,672
4	187,600	−11,393
5	200,800	−13,581
6	214,000	−15,423
7	227,200	−17,041
8	240,400	−18,522
9	253,600	−19,931
10	266,800	−21,323
11	280,000	−22,742

8.5　有符号曲率分布

沿进口至出口的方向，曲率随半径的变化由参数方程给出

$$r = r(u),$$
$$\kappa(u) = -\frac{3 A u}{\sqrt{2}\, k_{\mathrm{M}} C^{2} \sqrt{1+u^{4}}}.$$

第二式由曲率规律 $\kappa_0 = -3\,\mathrm{sgn}(u)\,\|\boldsymbol{q}(u)\|/(2C^2)$ 与曲线的等比缩放关系导出。拐点 M 处曲率为零。对本算例的叶轮，有

$$\kappa(P_1) = -\kappa(P_2) \approx 4{,}364 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-1},$$
$$\|\boldsymbol{M}\| \approx 210{,}203\ \mathrm{mm}.$$

圆弧通过 P_1 和 P_2，并与双纽线具有相同的进口切线。设进口的左侧单位法向量为 $\boldsymbol{n}_1$，弦矢量为 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1$。由两端点到圆心的距离相等，可得

$$\kappa_{\mathrm{окр}} = \frac{2\,\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|^{2}} \approx +1{,}455 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-1}.$$

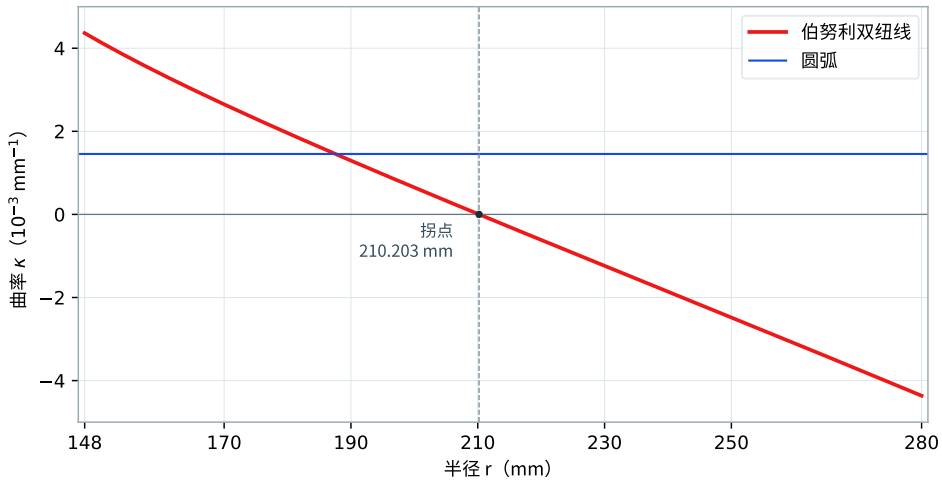


图 4: 边缘位置和进口切线相同时，HKS 中弧线与圆弧的有符号曲率。

双纽线的曲率逐渐减小并改变符号。其绝对值在拐点附近小于圆弧的曲率，在靠近两条边缘处大于圆弧的曲率。两条曲线的出口切线不同。损失和效率的比较需要在相同条件下进行流动计算。

参考文献

[1] Jansen W., Kirschner A. M. Impeller Blade Design Method for Centrifugal Compressors. In: *Fluid Mechanics, Acoustics, and Design of Turbomachinery*, Pt. 2. 1974. NASA NTRS 19750003125.

[2] Aungier R. H. *Centrifugal Compressors. A Strategy for Aerodynamic Design and Analysis.* ASME Press, 2000.

[3] *Lemniscate*. Encyclopædia Britannica. 11th ed., 1911.