Л.Артилаква

Лопатки колеса центробежного компрессора со средней линией в форме фрагмента лемнискаты Бернулли

2013 год

Аннотация. Предложено аналитическое построение средней линии лопатки рабочего колеса центробежного компрессора на основе гладкого фрагмента лемнискаты Бернулли с центрально-симметричными концами. Из неявного уравнения кривой получено явное выражение ординаты, сохраняющее знак по обе стороны узла. Выведены формулы поворота по заданному входному углу и равномерного масштабирования по пересечению хорды с выходной окружностью. Получены выражения для длины дуги, кривизны и конструктивного угла на выходе. Определены условия, при которых фрагмент пригоден для построения радиально протяжённой лопатки, и сформулированы пределы аэродинамической интерпретации геометрического результата.

Ключевые слова. Центробежный компрессор, рабочее колесо, средняя линия лопатки, лемниската Бернулли, кривизна, профилирование.

1. Введение

Средняя линия лопатки задаёт в плане направление лопатки между входной и выходной кромками. Совместно с законом толщины, шириной проточной части и расположением соседних лопаток она определяет геометрию межлопаточного канала. При неизменных входном и выходном диаметрах и одинаковых углах на кромках разные средние линии могут задавать разные направления касательной и разные проходные сечения внутри колеса. От этого зависит, где вдоль канала поток поворачивает, ускоряется или замедляется и как распределяется нагрузка на поверхности лопатки.

При геометрическом профилировании линию можно задать дугой окружности. У такой дуги кривизна постоянна. В аэродинамическом профилировании форму лопатки определяют, в частности, по заданному распределению относительной скорости на её поверхностях [1, 2]. Геометрическая постановка, рассматриваемая здесь, задаёт аналитическое семейство линий, для которых изменение направления касательной и кривизну можно вычислить на всём участке между кромками. Это позволяет оценить исходную геометрию до расчёта поля течения.

Выбранный фрагмент лемнискаты проходит через её узел по одной гладкой ветви. В середине фрагмента кривизна обращается в нуль и меняет знак. По обе стороны точки перегиба кривизна возрастает по модулю при удалении от узла. Таким образом, поворот касательной распределяется вдоль двух сопряжённых участков без скачка направления и кривизны. Центральная симметрия связывает касательные на концах. После размещения кривой в колесе эта связь должна согласоваться с требуемым положением кромок и выходным углом.

1.1. Газодинамические предпосылки выбора

Если относительная линия тока в плоской модели близка к средней линии лопатки, её геометрическая кривизна входит в нормальную составляющую ускорения. При модуле относительной скорости W и знаковой кривизне линии тока $\kappa_{\text{т}}$ справедливо

$$a_n = W^2 \kappa_{\text{т}}. \tag{1}$$

Закон кривизны средней линии даёт геометрический ориентир для распределения этого ускорения. При одинаковом W меньший модуль кривизны линии тока соответствует меньшему модулю нормального ускорения. Для установившегося течения в системе, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, нормальная проекция уравнения движения имеет вид

$$\rho_{\text{г}} W^2 \kappa_{\text{т}} = -\frac{\partial p}{\partial n} - \rho_{\text{г}} \big[2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{W} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \big] \cdot \boldsymbol{n} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{n}. \tag{2}$$

Здесь p - давление, $\rho_{\text{г}}$ - плотность газа, $\boldsymbol{\tau}$ - тензор вязких напряжений, $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор относительно оси вращения, а $\boldsymbol{n}$ - левая единичная нормаль к рассматриваемой плоской линии тока. Геометрический вклад $W^2 \kappa_{\text{т}}$ рассматривается вместе с действием сил Кориолиса и центробежных сил. По одной кривизне средней линии определить распределение давления, развитие пограничного слоя и границу отрыва нельзя.

Физическую аналогию с движением материальной точки вдоль заданной дуги можно записать для идеального движения без трения в потенциальном поле Φ. Если v_1 - начальная скорость точки, а s - длина пути, время прохождения дуги определяется интегралом

$$T = \int_0^L \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{v_1^2 + 2\big[\Phi(0) - \Phi(s)\big]}}. \tag{3}$$

Равенство времени движения по дуге и хорде потребовало бы отдельного равенства двух таких интегралов для заданных начальных условий и поля. В колесе на течение газа дополнительно влияют давление и вязкие напряжения. Поэтому инженерное обоснование выбора лемнискаты опирается на вычисляемое распределение кривизны и возможность согласовать линию с геометрией колеса. Снижение потерь и повышение КПД представляют собой проверяемые газодинамические гипотезы.

2. Исходная ветвь лемнискаты

Пусть D_1 и D_2 - диаметры окружностей, на которых расположены начало и конец средней линии в плане колеса. В локальной системе $O'xy$ фокусы лемнискаты имеют координаты $(-C, 0)$ и $(C, 0)$, где C - расстояние от узла до каждого фокуса. Параметр C и полуразмах выбранного фрагмента по оси x, обозначенный a, задаются формулами

$$C = D_2 - D_1, \qquad D_2 > D_1 > 0, \tag{4}$$

$$a = \frac{D_2 - D_1}{2\sqrt{2}}. \tag{5}$$

С обозначением $A = \sqrt{2}\,C$ классическое уравнение лемнискаты записывается как $(x^2 + y^2)^2 = A^2(x^2 - y^2)$ [3]. В принятых обозначениях оно непосредственно

следует из условия постоянства произведения расстояний до фокусов

$$\sqrt{(x-C)^2+y^2}\,\sqrt{(x+C)^2+y^2} = C^2, \tag{6}$$

$$(x^2+y^2+C^2)^2 - 4C^2x^2 = C^4, \tag{7}$$

$$(x^2+y^2)^2 = 2C^2(x^2-y^2). \tag{8}$$

Введём $S(x) = \sqrt{C^4+4C^2x^2}$. После выделения y^2 получаем

$$y^2 = S(x) - x^2 - C^2, \tag{9}$$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{S(x)-x^2-C^2}, \tag{10}$$

$$-a \le x \le a, \qquad f(0) = 0. \tag{11}$$

На чертеже 1 ветвь проходит из третьей четверти в первую. Поэтому знаки x и $f(x)$ совпадают. Знак ординаты существенен. Одинаковый знак квадратного корня по обе стороны узла соединил бы участки с разными касательными.

Рационализованная форма удобна для вычислений вблизи узла и показывает, что ветвь аналитически продолжается через него

$$S(x) - x^2 - C^2 = \frac{x^2(2C^2-x^2)}{S(x)+x^2+C^2}, \tag{12}$$

$$f(x) = x\sqrt{\frac{2C^2-x^2}{S(x)+x^2+C^2}}. \tag{13}$$

Функция f нечётна. Подкоренное выражение последней формулы положительно на всём выбранном отрезке. Начальная и конечная точки фрагмента, его хорда и длина хорды определяются последовательно

$$\boldsymbol{q}(x) = \big(x, f(x)\big)^{\mathsf{T}}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{q}_1 = \big(-a, -f(a)\big)^{\mathsf{T}}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \big(a, f(a)\big)^{\mathsf{T}}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1 = 2\big(a, f(a)\big)^{\mathsf{T}}, \tag{17}$$

$$l_1 = \|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1\| = 2\sqrt{a^2+f(a)^2}. \tag{18}$$

3. Касательная и кривизна исходного фрагмента

Для $x \neq 0$ продифференцируем тождество $f^2 = S - x^2 - C^2$

$$S'(x) = \frac{4C^2x}{S(x)}, \tag{19}$$

$$2f(x)f'(x) = \frac{4C^2x}{S(x)} - 2x, \tag{20}$$

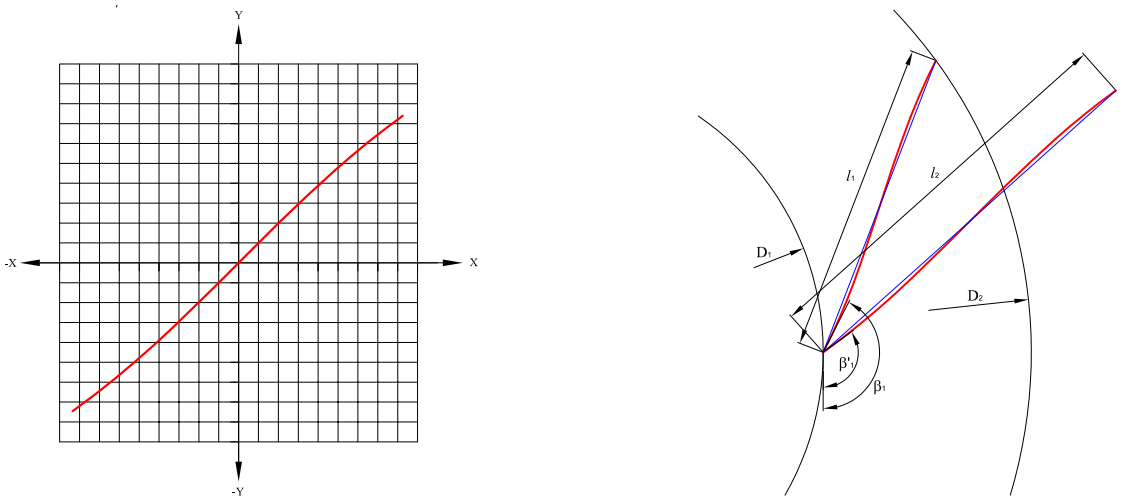
$$f'(x) = \frac{x}{f(x)}\left(\frac{2C^2}{S(x)} - 1\right). \tag{21}$$

Узел не создаёт разрыва касательной. Разложение рационализованной формы даёт

$$f(x) = x - \frac{x^3}{C^2} + O\!\left(\frac{x^5}{C^4}\right), \qquad x \to 0, \tag{22}$$

$$f'(0) = 1, \tag{23}$$

$$f''(0) = 0. \tag{24}$$



а) Гладкая ветвь в локальных осях б) Поворот и привязка к окружностям

Рис. 1: Построение средней линии. Длины l_1 и l_2 в расчёте ниже определены как длины исходной и окончательной хорд соответственно.

Производная f' чётна, поэтому $f'(-a) = f'(a)$. Направление касательной на входе в локальных осях характеризуется углом α_1. Наклон касательной определяется как предел наклонов секущих

$$f'(-a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h}, \tag{25}$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\bigl(f'(-a)\bigr). \tag{26}$$

Знаковая кривизна κ_0 относится к обходу в сторону возрастания x. Для $x \neq 0$ вторая производная и кривизна равны

$$f''(x) = \frac{\dfrac{2C^2}{S(x)} - 1 - \dfrac{8C^4 x^2}{S(x)^3} - \bigl(f'(x)\bigr)^2}{f(x)}, \tag{27}$$

$$\kappa_0(x) = \frac{f''(x)}{\bigl[1 + \bigl(f'(x)\bigr)^2\bigr]^{3/2}}. \tag{28}$$

Пусть $\rho = \|\boldsymbol{q}(x)\|$ - расстояние до узла, а φ - локальный полярный угол. На положительной половине ветви $\rho^2 = A^2 \cos(2\varphi)$. При дифференцировании по φ получаем

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = -\rho \operatorname{tg}(2\varphi), \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\varphi^2} = \rho \operatorname{tg}^2(2\varphi) - \frac{2\rho}{\cos^2(2\varphi)}, \tag{30}$$

$$\frac{\rho^2 + 2(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\varphi)^2 - \rho\,\mathrm{d}^2\rho/\mathrm{d}\varphi^2}{\bigl[\rho^2 + (\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\varphi)^2\bigr]^{3/2}} = \frac{3\rho}{A^2}. \tag{31}$$

Последнее выражение задаёт кривизну при возрастании φ. На участке $x > 0$ отношение $f(x)/x$ убывает, поскольку в его рационализованном выражении числитель под корнем убывает, а знаменатель возрастает. Поэтому угол φ уменьшается при возрастании x. С учётом нечётности f'' и чётности f' итоговый закон на всём фрагменте имеет вид

$$\kappa_0(x) = -\frac{3\operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2 + f(x)^2}}{2C^2}, \qquad \kappa_0(0) = 0. \tag{32}$$

В частности, $\rho^2 = S(x) - C^2$ возрастает с $|x|$. Максимальный модуль кривизны выбранной ветви достигается на концах, а в узле расположен перегиб.

4. Привязка кривой к рабочему колесу

4.1. Совмещение входной точки и касательной

Начало глобальной системы OXY совмещено с осью колеса. Ось X направлена по радиусу к входной точке P_1. Положительное вращение принято против часовой стрелки. Входной конструктивный угол β_1 отсчитывается от касательной против вращения к наружному радиальному направлению. Радиусы и заданный единичный вектор касательной на входе равны

$$r_1 = \frac{D_1}{2}, \tag{33}$$

$$r_2 = \frac{D_2}{2}, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = (r_1, 0)^{\mathsf{T}}, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{t}_1 = (\sin\beta_1, -\cos\beta_1)^{\mathsf{T}}. \tag{36}$$

Исходный угол β_1' отсчитывается от того же опорного направления после переноса начала фрагмента в P_1. Поворот на угол γ задаётся разностью углов

$$\beta_1' = \frac{\pi}{2} + \alpha_1, \tag{37}$$

$$\gamma = \beta_1 - \beta_1', \tag{38}$$

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Перенос и поворот применяются ко всему фрагменту. В частности, поворот хорды определяется разностью её исходных концов

$$\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{P}_1 + R(\gamma)\big[\boldsymbol{q}(x) - \boldsymbol{q}_1\big], \tag{40}$$

$$\boldsymbol{d} = R(\gamma)\big(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1\big), \tag{41}$$

$$\|\boldsymbol{d}\| = l_1. \tag{42}$$

4.2. Пересечение луча с выходной окружностью

Через P_1 проводится луч в направлении повёрнутой хорды. Его пересечение с окружностью радиуса r_2 определяется положительным параметром λ из условия

$$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1 + \lambda\boldsymbol{d}, \tag{43}$$

$$\|\boldsymbol{P}_1 + \lambda\boldsymbol{d}\|^2 = r_2^2, \tag{44}$$

$$l_1^2\lambda^2 + 2(\boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{d})\lambda + r_1^2 - r_2^2 = 0. \tag{45}$$

Так как $r_2 > r_1$, квадратное уравнение имеет ровно один положительный корень. Он задаёт пересечение в направлении от входа к выходу. При обозначении $B = \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{d}$ получаем

$$\lambda = \frac{-B + \sqrt{B^2 + l_1^2(r_2^2 - r_1^2)}}{l_1^2}, \tag{46}$$

$$l_2 = \|\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1\| = \lambda l_1, \tag{47}$$

$$k_{\text{м}} = \frac{l_2}{l_1} = \lambda. \tag{48}$$

Для записи прямой $Y = kX + b$ при $d_X \neq 0$ уравнение пересечения с окружностью принимает скалярный вид

$$k = \frac{d_Y}{d_X}, \tag{49}$$

$$b = Y_1 - kX_1, \tag{50}$$

$$j_1 = 1 + k^2, \tag{51}$$

$$j_2 = 2kb, \tag{52}$$

$$j_3 = b^2 - r_2^2, \tag{53}$$

$$j_4 = j_2^2 - 4j_1j_3, \tag{54}$$

$$X_2 = \frac{-j_2 \pm \sqrt{j_4}}{2j_1}, \tag{55}$$

$$Y_2 = kX_2 + b. \tag{56}$$

Из двух пересечений прямой с окружностью выбирается то, для которого $(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \cdot \boldsymbol{d} > 0$. Векторная форма применима также при вертикальной хорде.

4.3. Окончательное уравнение средней линии

Равномерное масштабирование выполняется относительно входной точки P_1.
Основное расчётное уравнение средней линии

$$\boxed{\boldsymbol{P}(x) = \boldsymbol{P}_1 + k_{\text{м}} R(\gamma)\big[\boldsymbol{q}(x) - \boldsymbol{q}_1\big], \qquad -a \le x \le a.} \tag{57}$$

В координатах колеса

$$X(x) = r_1 + k_{\text{м}}\big[(x + a)\cos\gamma - (f(x) + f(a))\sin\gamma\big], \tag{58}$$

$$Y(x) = k_{\text{м}}\big[(x + a)\sin\gamma + (f(x) + f(a))\cos\gamma\big]. \tag{59}$$

Параметрическое представление сохраняет соответствие точек до и после преобразования. Для равномерного масштабирования самой локальной формулы используется тождество

$$\widetilde{x} = k_{\text{м}} x, \tag{60}$$

$$\widetilde{C} = k_{\text{м}} C, \tag{61}$$

$$\widetilde{y}(\widetilde{x}) = \operatorname{sgn}(\widetilde{x})\sqrt{\sqrt{\widetilde{C}^4 + 4\widetilde{C}^2\widetilde{x}^2} - \widetilde{x}^2 - \widetilde{C}^2}. \tag{62}$$

Локальный диапазон при этом преобразуется в $[-k_{\text{м}}a, k_{\text{м}}a]$. Поворот и масштабирование сохраняют направление касательной после её совмещения с $\boldsymbol{t}_1$. По построению $\boldsymbol{P}(-a) = \boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}(a) = \boldsymbol{P}_2$ и $\|\boldsymbol{P}_2\| = r_2$.

5. Контроль геометрии и выходного угла

Единичная касательная к средней линии в колесе, длина дуги и кривизна после преобразования определяются выражениями

$$\boldsymbol{t}(x) = \frac{R(\gamma)(1, f'(x))^{\mathsf{T}}}{\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}}, \tag{63}$$

$$s(x) = k_{\text{м}} \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + \left(f'(u)\right)^2}\, \mathrm{d}u, \tag{64}$$

$$L = k_{\text{м}} \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(f'(u)\right)^2}\, \mathrm{d}u, \tag{65}$$

$$\kappa(x) = \frac{\kappa_0(x)}{k_{\text{м}}}, \tag{66}$$

$$\max_{x \in [-a,a]} |\kappa(x)| = \frac{3\sqrt{a^2 + f(a)^2}}{2 k_{\text{м}} C^2}. \tag{67}$$

Положительный масштаб не меняет направления касательных, но изменяет длину дуги и модуль кривизны. В глобальных координатах точка перегиба находится в середине хорды

$$\boldsymbol{P}(0) = \frac{\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2}{2}. \tag{68}$$

Для проверки радиального хода вычисляются расстояние до оси и его производная

$$r(x) = \sqrt{X(x)^2 + Y(x)^2}, \tag{69}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{\boldsymbol{P}(x) \cdot \boldsymbol{P}'(x)}{r(x)}. \tag{70}$$

Достаточное условие однозначного представления кривой как функции радиуса на всём интервале - положительность $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x$ при $r > 0$. Проверка этого условия нужна помимо привязки концов к окружностям. При $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x > 0$ и текущем конструктивном угле $\beta(x)$ радиальная и окружная проекции касательной дают

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \sin\beta, \tag{71}$$

$$r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = -\cos\beta, \tag{72}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = -\frac{\operatorname{ctg}\beta}{r}. \tag{73}$$

Таким образом, положение средней линии по окружности зависит от распределения угла по всей её длине.

На выходе вводятся единичные векторы радиального и окружного направлений. Окружное направление совпадает с положительным направлением вращения

$$\boldsymbol{e}_{r,2} = \frac{1}{r_2}(X_2, Y_2)^{\mathsf{T}}, \tag{74}$$

$$\boldsymbol{e}_{\theta,2} = \frac{1}{r_2}(-Y_2, X_2)^{\mathsf{T}}. \tag{75}$$

Выходной конструктивный угол определяется по проекциям касательной $\boldsymbol{t}(a)$

$$\sin\beta_2 = \boldsymbol{t}(a) \cdot \boldsymbol{e}_{r,2}, \tag{76}$$

$$\cos\beta_2 = -\boldsymbol{t}(a) \cdot \boldsymbol{e}_{\theta,2}. \tag{77}$$

Знаки двух проекций определяют четверть, в которой расположен угол. Поскольку касательные исходной ветви на обоих концах сонаправлены, $\boldsymbol{t}(a) = \boldsymbol{t}(-a)$. Если θ_2 - ориентированный полярный угол точки P_2 относительно оси X, отсюда следует

$$\beta_2 \equiv \beta_1 - \theta_2 \pmod{2\pi}. \tag{78}$$

При заданных D_1, D_2 и β_1 выходной угол симметричного фрагмента получается из построения. Независимое задание обоих углов и обоих положений кромок

возможно лишь при выполнении указанной связи. Для сравнения форм при фиксированных концах и углах это условие проверяется до сопоставления кривизн.

6. Средняя линия и межлопаточный канал

Чертёж 2 иллюстрирует, как разные средние линии изменяют форму межлопаточного канала. Линия НПФ ХКС (научно-производственной фирмы «Химмаш-Компрессор Сервис») строится по лемнискате. Линия ЛПИ соответствует профилированию Ленинградского политехнического института, а обозначение $R = \text{const}$ относится к дуге окружности. Схема показывает различие геометрии и служит основой для постановки сопоставимых расчётов.

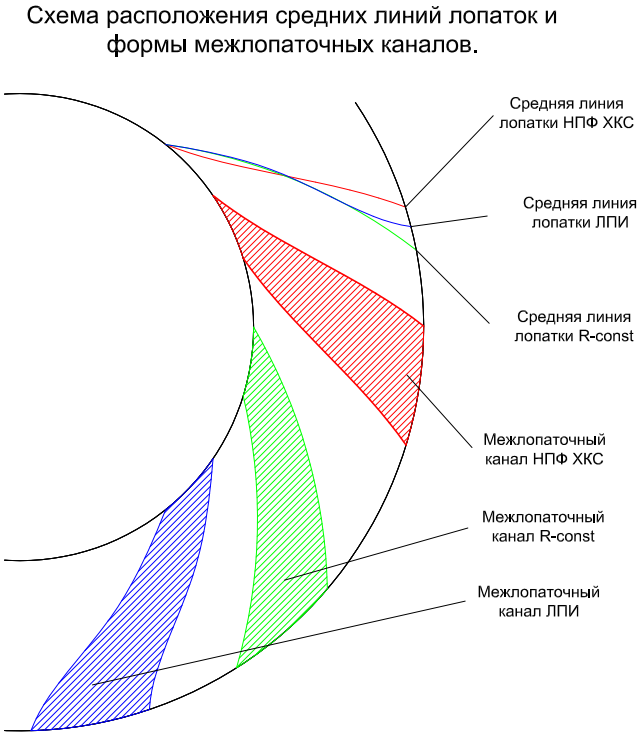


Рис. 2: Схема средних линий и межлопаточных каналов НПФ ХКС, ЛПИ и варианта с постоянным радиусом кривизны.

Для формирования поверхностей лопатки в плоской модели к средней линии добавляется закон полутолщины $h(s)$. Если $\boldsymbol{n}(s)$ - левая единичная нормаль, а $\boldsymbol{t}(s)$ - единичная касательная, линии сторон лопатки задаются формулами

$$\boldsymbol{P}_{\pm}(s) = \boldsymbol{P}(s) \pm h(s)\boldsymbol{n}(s), \tag{79}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_{\pm}}{\mathrm{d}s} = \bigl[1 \mp h(s)\kappa(s)\bigr]\boldsymbol{t}(s) \pm \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{n}(s). \tag{80}$$

Условие $h(s)|\kappa(s)| < 1$ достаточно для локальной регулярности обеих линий. Проходные сечения дополнительно зависят от меридиональной ширины колеса, закона толщины и окружного шага. При заданном числе лопаток z соседние средние линии получают поворотом вокруг оси колеса на угловой шаг

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{z}. \tag{81}$$

В геометрической модели проверяются проходные сечения, отсутствие пересечений сторон соседних лопаток и согласование кромок с меридиональными обводами. Для оценки самостоятельного влияния распределения кривизны в сравнительном расчёте фиксируются положения кромок, входной и выходной углы, закон толщины, меридиональная геометрия, частота вращения, расход и входное состояние газа. При этих условиях изменение поля скоростей, потерь и КПД можно отнести к изменению формы средней линии с учётом точности расчёта.

7. Выводы

Симметричный фрагмент лемнискаты Бернулли даёт аналитически определённую среднюю линию с непрерывной касательной и кривизной. Участки с противоположными знаками кривизны сопрягаются в точке перегиба. Модуль кривизны на каждом участке определяется расстоянием до узла исходной кривой и масштабом преобразования.

Предложенное построение совмещает входную касательную с заданным конструктивным углом и располагает выходную точку на наружной окружности. Положительный масштаб однозначно определяется пересечением луча повёрнутой хорды с этой окружностью. Выходной угол следует из взаимного расположения концов и сонаправленности их касательных.

Газодинамическая целесообразность применения этой геометрии оценивается по характеру течения и потерям в сопоставимых каналах. Приведённые выражения задают воспроизводимую исходную геометрию для такой проверки.

8. Численный пример для колеса НПФ ХКС

Для колеса НПФ ХКС диаметры D_1 и D_2 задают положение входной и выходной кромок. Расчёт выполнен без промежуточного округления.

8.1. Исходный фрагмент лемнискаты

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 296 \text{ мм},\\
D_2 &= 560 \text{ мм},\\
\beta_1 &= 39{,}069^\circ,\\
r_1 &= \frac{296}{2} = 148 \text{ мм},\\
r_2 &= \frac{560}{2} = 280 \text{ мм},\\
C &= 560 - 296 = 264 \text{ мм},\\
a &= \frac{264}{2\sqrt{2}} \approx 93{,}338095 \text{ мм},\\
f(a) &= \sqrt{\sqrt{264^4 + 4 \cdot 264^2 a^2} - a^2 - 264^2} \approx 83{,}377566 \text{ мм},\\
\boldsymbol{q}_1 &\approx (-93{,}338095;\ -83{,}377566)^{\mathsf{T}} \text{ мм},\\
\boldsymbol{q}_2 &\approx (93{,}338095;\ 83{,}377566)^{\mathsf{T}} \text{ мм},
\end{aligned}
$$

$$l_1 = 2\sqrt{a^2 + f(a)^2} \approx 250{,}310356 \text{ мм}.$$

8.2. Поворот и совмещение с выходной окружностью

$$\begin{aligned}
f'(-a) = f'(a) &= \frac{a}{f(a)}\left(\frac{2\cdot 264^2}{\sqrt{264^4 + 4\cdot 264^2 a^2}} - 1\right) \approx 0{,}70861238,\\
\alpha_1 &= \operatorname{arctg} f'(-a) \approx 35{,}321859^\circ,\\
\gamma &= 39{,}069^\circ - 90^\circ - \alpha_1 \approx -86{,}252859^\circ,\\
\boldsymbol{P}_1 &= (148;\,0)^{\mathsf{T}} \text{ мм},\\
\boldsymbol{d} &= R(\gamma)(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \approx (178{,}598554;\,-175{,}379106)^{\mathsf{T}} \text{ мм},\\
B &= \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{d} \approx 26\,432{,}586003 \text{ мм}^2,\\
k_{\text{м}} &= \frac{-B + \sqrt{B^2 + l_1^2(280^2 - 148^2)}}{l_1^2} \approx 0{,}617199818,\\
l_2 &= k_{\text{м}} l_1 \approx 154{,}491506 \text{ мм},\\
\boldsymbol{P}_2 &= \boldsymbol{P}_1 + k_{\text{м}}\boldsymbol{d} \approx (258{,}230995;\,-108{,}243952)^{\mathsf{T}} \text{ мм},\\
\|\boldsymbol{P}_2\| &= \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = 280 \text{ мм}.
\end{aligned}$$

8.3. Длина дуги и выходной угол

Длина средней линии вычисляется интегрированием по исходной ветви с учётом коэффициента масштаба.

$$\begin{aligned}
L &= k_{\text{м}} \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \approx 154{,}687625 \text{ мм},\\
L - l_2 &\approx 0{,}196119 \text{ мм},\\
\theta_2 &= \operatorname{arctg}\!\left(\frac{Y_2}{X_2}\right) \approx -22{,}742208^\circ \qquad (X_2 > 0),\\
\beta_2 &= \beta_1 - \theta_2 \approx 61{,}811208^\circ.
\end{aligned}$$

Исходное значение конструктивного угла колеса НПФ ХКС составляет $\beta_{2,\text{табл}} = 61{,}829^\circ$. Разность по модулю равна

$$|\beta_2 - \beta_{2,\text{табл}}| \approx 0{,}018^\circ.$$

8.4. Полярная параметризация и опорные точки

Полюс O совмещён с осью колеса. Луч $\theta = 0$ проходит через входную кромку P_1. Полярный угол θ положителен против часовой стрелки. В этом примере после входной кромки он отрицателен. Угол θ задаёт положение точки, а β задаёт наклон касательной относительно местного окружного направления.

Прямое вычисление координат. Введём безразмерный параметр u на выбранной гладкой ветви. Для $x \neq 0$ отношение y/x положим равным $(1 - u^2)/(1 + u^2)$, причём знак u совпадает со знаком x. Подстановка в исходное

уравнение лемнискаты и продолжение через узел дают

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2}\,C, \qquad D(u) = 1 + u^4, \\ \boldsymbol{v}(u) &= (u + u^3,\ u - u^3)^{\mathsf{T}}, \\ \boldsymbol{q}(u) &= \frac{A}{D(u)}\,\boldsymbol{v}(u), \\ u_* &= \sqrt{\frac{a - f(a)}{a + f(a)}}, \qquad -u_* \le u \le u_*. \end{aligned}$$

Здесь $u = -u_*$ соответствует входу, $u = 0$ - перегибу, а $u = u_*$ - выходу. В глобальной системе центр симметрии $\boldsymbol{M}$ и числитель радиус-вектора $\boldsymbol{N}(u)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \frac{\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2}{2}, \\ \boldsymbol{N}(u) &= D(u)\boldsymbol{M} + k_{\text{м}} A R(\gamma)\boldsymbol{v}(u), \\ \boldsymbol{P}(u) &= \frac{\boldsymbol{N}(u)}{D(u)}. \end{aligned}$$

Следовательно, полярные координаты вычисляются непосредственно по параметру

$$\begin{aligned} r(u) &= \frac{\sqrt{N_X(u)^2 + N_Y(u)^2}}{D(u)}, \\ \theta(u) &= \operatorname{arctg}\!\left(\frac{N_Y(u)}{N_X(u)}\right) \qquad \text{при } N_X(u) > 0. \end{aligned}$$

В общем случае четверть угла определяется по знакам обеих координат. Эта форма позволяет построить всю кривую прямой подстановкой значений u. Если входной величиной задан сам угол θ, радиус $r(\theta)$ определяется алгебраически пересечением луча с выбранной ветвью. Для этого в исходное уравнение подставляется

$$\boldsymbol{q} = \frac{R(\gamma)^{\mathsf{T}}\big(r(\cos\theta, \sin\theta)^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{M}\big)}{k_{\text{м}}}.$$

Из корней полученного уравнения четвёртой степени по r выбирается пересечение с нужной ветвью в пределах от P_1 до P_2.

Равномерный шаг по радиусу. Для таблицы сохраняются 11 опорных точек, включая кромки. Условия на радиус и обозначения коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{280 - 148}{11 - 1} = 13{,}2 \text{ мм}, \\ r_i &= 148 + (i - 1)\Delta r, \qquad i = 1, \dots, 11, \\ \boldsymbol{b} &= (b_x, b_y)^{\mathsf{T}} = R(\gamma)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}, \\ E_i &= \|\boldsymbol{M}\|^2 - r_i^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\|\boldsymbol{q}(u)\|^2 = 2A^2u^2/D(u)$, раскрытие условия $\|\boldsymbol{P}(u_i)\|^2 = r_i^2$ даёт уравнение

$$E_i(1 + u_i^4) + 2k_{\text{м}}A\big[(b_x + b_y)u_i + (b_x - b_y)u_i^3\big] + 2k_{\text{м}}^2A^2u_i^2 = 0.$$

Для промежуточных радиусов берётся действительный корень на отрезке $[-u_*, u_*]$. На этом участке радиус возрастает, поэтому корень для каждого r_i единственный. Значения в таблице получены из корней многочлена и формулы $\theta(u_i)$.

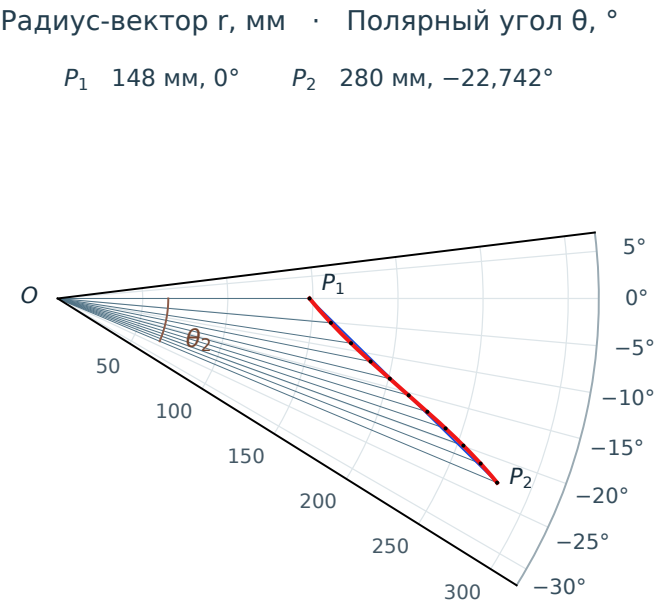


Рис. 3: Лемниската (красная) и хорда (синяя) в полярных координатах. Тонкие линии соединяют чёрные опорные точки с полюсом O.

Таблица 1: Полярные координаты 11 опорных точек

№	r, мм	θ, градусы
1	148,000	0,000
2	161,200	−5,097
3	174,400	−8,672
4	187,600	−11,393
5	200,800	−13,581
6	214,000	−15,423
7	227,200	−17,041
8	240,400	−18,522
9	253,600	−19,931
10	266,800	−21,323
11	280,000	−22,742

8.5. Распределение знаковой кривизны

При обходе от входа к выходу кривизна по радиусу задаётся параметрически

$$r = r(u),$$
$$\kappa(u) = -\frac{3Au}{\sqrt{2}\,k_{\text{м}} C^2 \sqrt{1+u^4}}.$$

Вторая формула следует из закона $\kappa_0 = -3\,\mathrm{sgn}(u)\|\boldsymbol{q}(u)\|/(2C^2)$ и масштабирования кривой. В точке перегиба M кривизна равна нулю. Для этого колеса расчёт даёт

$$\kappa(P_1) = -\kappa(P_2) \approx 4{,}364 \cdot 10^{-3}\ \text{мм}^{-1},$$
$$\|\boldsymbol{M}\| \approx 210{,}203\ \text{мм}.$$

Дуга окружности проходит через P_1 и P_2 с той же входной касательной. При левой единичной нормали $\boldsymbol{n}_1$ на входе и хорде $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1$ равенство расстояний до центра окружности даёт

$$\kappa_{\text{окр}} = \frac{2\,\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|^2} \approx +1{,}455 \cdot 10^{-3}\ \text{мм}^{-1}.$$

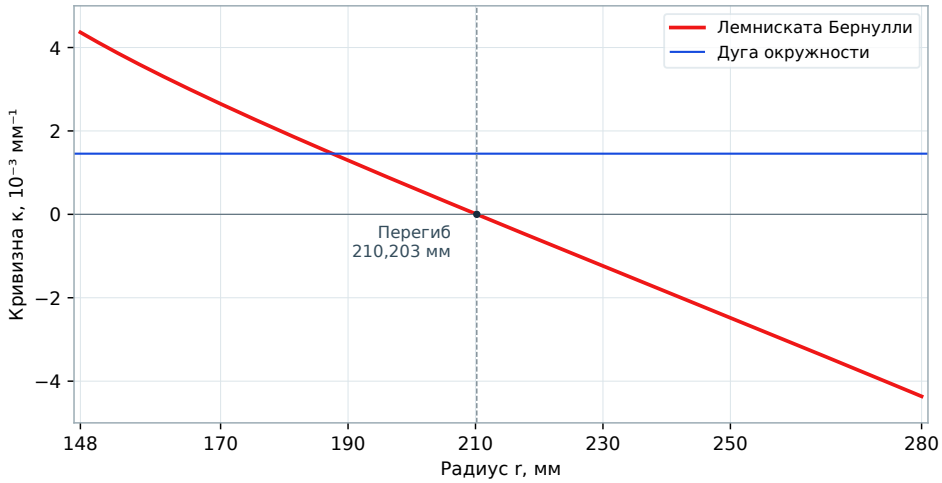


Рис. 4: Знаковая кривизна средней линии НПФ ХКС и дуги окружности при одинаковых кромках и входной касательной.

Кривизна лемнискаты убывает и меняет знак. Её модуль меньше, чем у дуги, вблизи перегиба и больше у кромок. Выходные касательные различаются. Сравнение потерь и КПД требует расчёта течения при согласованных условиях.

Список литературы

[1] Jansen W., Kirschner A. M. Impeller Blade Design Method for Centrifugal Compressors. In: *Fluid Mechanics, Acoustics, and Design of Turbomachinery*, Pt. 2. 1974. NASA NTRS 19750003125.

[2] Aungier R. H. *Centrifugal Compressors. A Strategy for Aerodynamic Design and Analysis*. ASME Press, 2000.

[3] *Lemniscate*. Encyclopædia Britannica. 11th ed., 1911.